

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №16**  
**КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ. УРАВНЕНИЯ**  
**РЕГРЕССИИ. ВЫБОРОЧНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯ-**  
**ЦИИ И ВЫБОРОЧНОЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ОТНОШЕНИЕ**

**I.**

**Пример.** Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$  по данным  $n = 5$  наблюдений:

$x$	1	1,5	3	4,5	5
$y$	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

**Решение**

Составим расчетную таблицу 1.

Таблица 1.

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	4,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8,15$	$\sum x_i^2 = 57,50$	$\sum x_i y_i = 26,975$

Найдем искомые параметры, для чего подставим вычисленные по таблице суммы в соотношения (3):

$$\rho_{yx} = \frac{5 \cdot 26,975 - 15 \cdot 8,15}{5 \cdot 57,5 - 15^2} = 0,202;$$
$$b = \frac{57,5 \cdot 8,15 - 15 \cdot 26,975}{5 \cdot 57,5 - 15^2} = 1,024.$$

Напишем искомое уравнение регрессии:

$$y = 0,202x + 1,024$$

Для того чтобы получить представление, насколько хорошо вычисленные по этому уравнению значения  $Y_i$  согласуются с наблюдаемыми значениями  $y_i$ , найдем отклонения  $Y_i - y_i$ . Результаты вычислений сведены в таблицу 2.

Таблица 2.

$x_i$	$Y_i$	$y_i$	$Y_i - y_i$
1,00	1,226	1,25	-0,024
1,50	1,327	1,40	-0,073
3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,993	1,75	0,083
5,00	2,034	2,25	-0,216

Как видно из таблицы, не все отклонения достаточно малы. Это объясняется малым числом наблюдений.

### 5. Корреляционная таблица

При большом числе наблюдений одно и то же значение  $x$  может встретиться  $n_x$  раз, одно и то же значение  $y$  может встретиться  $n_y$  раз, одна и та же пара чисел  $(x, y)$  может наблюдаться  $n_{xy}$  раз. Поэтому данные наблюдений группируют, т.е. подсчитывают частоты  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$ . Все сгруппированные данные записывают в виде таблицы, которую называют корреляционной.

Поясним устройство корреляционной таблицы на примере (табл. 3).

Таблица 3.

$X$	10	20	30	40	$n_y$
$Y$					
0,4	5	-	7	14	26
0,6	-	2	6	4	12
0,8	3	19	-	-	22

$n_x$	8	21	13	18	$n = 60$
-------	---	----	----	----	----------

В первой строке таблицы указаны наблюдаемые значения (10; 20; 30; 40) признака  $X$ , а в первом столбце - наблюдаемые значения (0,4; 0,6; 0,8) признака  $Y$ . На пересечении строк и столбцов вписаны частоты  $n_{xy}$  наблюдаемых пар значений признаков. Например, частота 5 указывает, что пара чисел (10; 0,4) наблюдалась 5 раз. Все частоты помещены в прямоугольнике, клетки которого выделены. Черточка означает, что соответственная пара чисел, например (20; 0,4), не наблюдалась.

В последнем столбце записаны суммы частот строк. Например, сумма частот первой строки прямоугольника, клетки которого выделены, равна  $n_y = 5 + 7 + 14 = 26$ ; это число указывает, что значение признака  $Y$ , равное 0,4 (в сочетании с различными значениями признака  $X$ ) наблюдалось 26 раз.

В последней строке записаны суммы частот столбцов. Например, число 8 указывает, что значение признака  $X$ , равное 10 (в сочетании с различными значениями признака  $Y$ ) наблюдалось 8 раз.

В клетке, расположенной в нижнем правом углу таблицы, помещена сумма всех частот (общее число всех наблюдений  $n$ ). Очевидно

$$\sum n_x = \sum n_y = n.$$

В нашем примере  $\sum n_x = 8 + 21 + 13 + 18 = 60$  и  $\sum n_y = 26 + 12 + 22 = 60$ .

**Пример 2.** По 5 предприятиям, выпускающим однородную продукцию, получены следующие данные:

Энерговооружённость предприятия – $X$ (кВт/час)	7,1	8,3	8,5	9	10,5
Производительность труда – $Y$ (шт)	14	16	14	15	17

Найти выборочный коэффициент корреляции, определяющей зависимость производительности труда ( $Y$ ) от энерговооружённости ( $X$ ).

**Решение**

Найдём

$$r_{\text{выб}} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Произведем необходимые вычисления:

$$\bar{X}_n = \frac{7.1+8.3+8.5+9+10.5}{5} = 8.68,$$

$$\bar{Y}_n = \frac{14+16+14+15+17}{5} = \frac{76}{5} = 15.2,$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{X}_n)^2} = \sqrt{\frac{7.1^2 + 8.3^2 + 8.5^2 + 9^2 + 10.5^2}{5} - 8.68^2} \approx 1.1$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_j^2}{n} - (\bar{Y}_n)^2} = \sqrt{\frac{14^2 + 16^2 + 14^2 + 15^2 + 17^2}{5} - 15.2^2} \approx 1.16$$

$$\sum x_i y_i = 7.1 \cdot 14 + 8.3 \cdot 16 + 8.5 \cdot 14 + 9 \cdot 15 + 10.5 \cdot 17 = 664.7.$$

Подставив найденные значения в формулу, получим:

$$r_b = \frac{664.7 - 5 \cdot 8.68 \cdot 15.2}{5 \cdot 1.1 \cdot 1.6} = \frac{5.02}{6.38} \approx 0.79$$

**Пример 3.** По 5 предприятиям, выпускающим однородную продукцию, получены следующие данные:

Энерговооружённость предприятия – X (кВт/час)	.1	.3	.5		0.5
Производительность труда – Y (шт)	4	6	4	5	7

Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии, определяющей зависимость производительности труда (Y) от энерговооружённости (X).

**Решение**

Найдем

$$r_{\text{выб}} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Произведем необходимые вычисления:

$$\bar{X}_n = \frac{7.1+8.3+8.5+9+10.5}{5} = 8.68,$$

$$\bar{Y}_n = \frac{14+16+14+15+17}{5} = \frac{76}{5} = 15.2,$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{X}_n)^2} = \sqrt{\frac{7.1^2 + 8.3^2 + 8.5^2 + 9^2 + 10.5^2}{5} - 8.68^2} \approx 1.1$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum y_j^2}{n} - (\bar{Y}_n)^2} = \sqrt{\frac{14^2 + 16^2 + 14^2 + 15^2 + 17^2}{5} - 15.2^2} \approx 1.16$$

$$\sum x_i y_i = 7.1 \cdot 14 + 8.3 \cdot 16 + 8.5 \cdot 14 + 9 \cdot 15 + 10.5 \cdot 17 = 664.7.$$

Подставив найденные значения в формулу, получим:

$$r_{\text{выб}} = \frac{664.7 - 5 \cdot 8.68 \cdot 15.2}{5 \cdot 1.1 \cdot 1.6} = \frac{5.02}{6.38} \approx 0.79$$

Найденный коэффициент корреляции указывает на достаточно сильную зависимость между признаками  $X$  и  $Y$ .

Подставив вычисленные значения в формулу уравнения регрессии

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{\text{выб}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}).$$

Найдем

$$\bar{y}_x - 15.2 = 0.79 \cdot \frac{1.16}{1.1} (x - 8.68).$$

Отсюда имеем:

$$\bar{y}_x = 0.82x + 8.08$$

### Упражнения

1. Составьте выборочное уравнение прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$  по данным выборки:

$X$	10	2	7	5
$Y$	8	2	6	4

2. По данным приведенным в корреляционной таблице, найдите выборочное уравнение прямой линии регрессии  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$ .

$XY$	3	4	5	6	$n_y$
2	5	-	1	4	10
3	1	2	-	-	3
4	-	4	5	3	12
$n_x$	6	6	6	7	$n = 25$

3. По данным приведенным в корреляционной таблице, найдите выборочное уравнение прямой линии регрессии  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$ .

$X$	3	3,5	4	4,5	5
$Y$	7	5	3	-	-
9	2	3	5	3	1

13	-	1	1	2	2

4. По данным приведенным в корреляционной таблице, найдите выборочное уравнение прямой линии регрессии  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$ .

$X$	3	5	1	-2	4	2	1	0	3
$Y$	-2	0	1	5	1	2	3	1	1

5. Составьте выборочное уравнение прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$  по данным, приведенным в таблице:

$X$	10	2	7	5
$Y$	8	2	6	4

6. По данным приведенным в корреляционной таблице, найдите выборочное уравнение прямой линии регрессии  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$ .

$X \backslash Y$	6	30	50	$n_y$
1	15	-	1	15
3	1	14	-	15
4	-	2	18	20
$n_x$	16	16	18	$n = 25$

7. По данным приведенным в корреляционной таблице, найдите выборочное уравнение прямой линии регрессии  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$ .

$X \backslash Y$	1	9	19	$n_y$
0	13	-	1	13
2	2	10	-	12
3	1	1	23	25
$n_x$	16	11	23	$n = 50$

8. По данным, приведенным в таблице, составьте уравнение прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$ .

$X \backslash Y$	20	25	30	35	40	$n_y$
16	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	6
$n_x$	4	14	46	16	20	$n = 100$

9. По данным приведенным в корреляционной таблице, найдите выборочное уравнение прямой линии регрессии  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$ .

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	35	40	$n_y$
100	2	1	-	-	-	-	-	-	3
120	3	4	3	-	-	-	-	-	10
140	-		5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-		-	-	-	-	4	1	5
$n_x$	5	5	8	И	8	6	5	2	$n = 50$

10. Найти выборочное уравнение прямых линий регрессии  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$  по данным, приведенным в корреляционной таблице:

$X \backslash Y$	18	23	28	33	38	43	48	$n_y$
125	-	1	-	-	-		-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17
200	-	-	1	8	7	-	-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	-	1	1	2
$n_x$	1	6	8	20	10	4	1	$n = 50$

**11.** В течение месяца по 10 продовольственным магазинам собраны данные о зависимости товарооборота ( $Y$ ) от расходов на рекламу ( $X$ ). Найдите выборочное уравнение прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$ .

$X$ (млн.сум)	200	300	320	410	304	500	540	600	650	700
$Y$ (млн.сум)	20	27	30	36	38	44	50	56	58	60

**12.** По данным, приведенным в таблице, найти выборочное уравнение прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$ .

$X$	6	6.8	7	8	8.5	9	10	11	12	13	14	15
$Y$	11	14	16	20	22	24	24	28	28	30	31	33

**13.** По приведенным данным об урожайности с 1 га ( $Y$ ) и количестве внесенных удобрений ( $X$ ), составьте выборочное уравнение регрессии.

$X$	6	7	7,5	8	9	9.5	10
$Y$	25	27	26	30	32	35	38

**14.** Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$  по данным, приведенным в корреляционной таблице.

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	35	$n_y$
100	-	-	-	-	-	6	1	7
120	-	-	-	-	-	4	2	6
140	-	-	8	10	5	-	-	23
160	3	4	3	-	-	-	-	10
180	2	1	-	1	-	-	-	4
$n_x$	5	5	11	11	5	10	3	$n = 50$

**15.** По приведенным ниже данным об объеме основных фондов ( $X$ ) сахарных заводов и расходов заводами в течение суток сахарной свеклы ( $Y$ ) найдите выборочное уравнение прямой линии регрессии.

$X$ (млн.сум)	150	250	270	350	370	400	420
$Y$ (тыс.ц)	6	6	7	8	8	8	10

**16.** С целью изучения зависимости фонда месячной заработной платы ( $Y$ ) и объема выпущенной продукции ( $X$ ) по 10 промышленным предприятиям получены следующие данные.



Предприятия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X (млн.сум)	500	570	600	650	700	720	800	860	900	920
Y (млн.сум)	110	120	130	135	138	145	150	154	160	164

Составьте уравнение прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$ .

В задачах 16-20 вычислить коэффициенты корреляции, определить и нанести на диаграмму рассеивания прямые регрессии  $Y$  на  $X$  и  $X$  на  $Y$  по данным выборкам.

17.

X	8	10	5	8	9
Y	1	3	1	2	3

18.

X	9	10	12	5
Y	6	4	7	3

19.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

20. Предел выносливости стали при изгибе  $Y$  (Н/мм<sup>2</sup>) оценивается на основании другой ее характеристики – предела упругости при кручении  $X$  (Н/мм<sup>2</sup>). По опытным данным для 12 марок стали найти уравнения линейной регрессии  $Y$  на  $X$  и  $X$  на  $Y$  и вычислить коэффициент корреляции между этими характеристиками. Результаты измерений:

$x_i$	51	67	84	81	101	109	71	97	109	51	105	89
$y_i$	25	30	43	44	57	58	43	46	62	45	55	45

$$\sum x_i = 1015, \sum y_i = 553, \sum x_i^2 = 90667, \sum y_i^2 = 26807, \sum x_i y_i = 48888.$$

21. По данным измерения двух переменных

$x_i$	66	70	75	80	82	85	90	92	95	98
$y_i$	60	78	65	87	74	70	78	95	88	90

вычислить коэффициент корреляции и найти уравнение линейной регрессии  $Y$  на  $X$ .

## II.

**Пример.** Найти  $\eta_{yx}$  по данным корреляционной таблицы.

$X$ $Y$	10	20	30	$n_y$
15	4	28	6	38
25	6	--	6	12
$n_x$	10	28	12	$n = 50$
$\bar{y}_x$	21	15	20	

### Решение

Найдем общее среднюю

$$\bar{y} = \frac{\sum n_y y}{n} = \frac{38 \cdot 15 + 12 \cdot 25}{50} = 17,4.$$

Найдем

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38(15 - 17,4)^2 + 12(25 - 17,4)^2}{50}} = 4,27.$$

$$\sigma_{y_x}^- = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10(21 - 17,4)^2 + 28(15 - 17,4)^2 + 12(20 - 17,4)^2}{50}} = 2,73.$$

Искомое корреляционное отношение

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{y_x}^-}{\sigma_y} = 0,64$$

**Пример 2.** По данной корреляционной таблице найти корреляционное отношение  $\eta_{yx}$  признака  $Y$  на признак  $X$ .

$Y \backslash$	10	20	30	$n_y$
5	4	28	6	38
5	6	-	6	12
$n_x$	10	28	12	$n = 50$
$\bar{y}_x$	21	15	20	

### Решение

Найдем общее среднее

$$\bar{y} = \frac{\sum n_i y_i}{n} = \frac{35 \cdot 15 + 15 \cdot 5}{50} = 17.4$$

Найдем общее среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38(15 - 17.4)^2 + 12(25 - 17.4)^2}{50}} = 4.27$$

Условно среднее квадратическое отклонение

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{y}_x} &= \sqrt{\frac{\sum n_x (y - \bar{y})^2}{n}} = \\ &= \sqrt{\frac{10(21 - 17.4)^2 + 25(15 - 17.4)^2 + 12(20 - 17.4)^2}{50}} = 2.73 \end{aligned}$$

Подставив формулу, получим:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{2.73}{4.27} = 0.64.$$

**Пример 3.** По данным корреляционной таблицы найти выборочное уравнение регрессии:  $\bar{Y}_x = Ax^2 + Bx + C$ .

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	$n_y$
0	18	1	1	-	-	20
3	1	20	-	-	-	21
5	3	5	10	2	-	20
10	-	-	7	12	-	19
17	-	-	-	-	20	20
$n_x$	22	26	18	14	20	$n = 100$

**Решение:** Составим расчетную таблицу

$X$	$n_x$	$\bar{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x \bar{y}_x x$	$n_x \bar{y}_x x^2$
0	22	0.8	0	0	0	0	17.6	0	0
1	26	3.27	26	26	26	26	85.02	85.02	85.02
2	18	6.67	3.6	72	144	288	120.06	240.12	480.24
3	14	9.3	42	126	378	1134	130	390	1170
4	20	17	80	320	1280	5120	340	1360	5440
	100		184	544	1828	6568	692.65	2075.14	7175.26

Подставив числа, содержащиеся в последней строке, получим систему уравнений относительно коэффициентов  $A, B, C$ :

$$\begin{cases} 6568A + 1828B + 544C = 7175.26 \\ 1828A + 544B + 184C = 2075.14 \\ 544A + 184B + 100C = 692.68 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$A = 0.66, \quad B = 1.23, \quad C = 1.07.$$

Подставив в уравнение регрессии

$$\bar{y}_x = Ax_2 + Bx + C$$

получим:

$$\bar{y}_x = 0.66x^2 + 1.23x + 1.07.$$

### Упражнения

По данным таблицы следующих задач найдите уравнение регрессии в виде  $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$  и корреляционное отношение  $\eta_{xy}$  и  $\eta_{yx}$ ;

1.

X \ Y	0	4	6	7	10	$n_y$
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
40	-	3	22	2	-	27
80	-	-	-	15	-	15
200	-	-	-	-	21	21
$n_x$	21	18	23	17	21	$n = 100$

2.

XY	6	30	50	$n_y$
1	15	-	-	15
3	1	14	-	15
4	-	2	18	20
$n_x$	16	16	18	$n = 50$

3.

X \ Y	1	9	19	$n_y$
0	13	-	-	13

2	2	10	-	12
3	1	1	23	25
$n_x$	16	11	23	$n = 50$

4.

$X \backslash Y$	10	11	12	13	14	15
25	5	3	1	-	-	-
30	2	4	2	1	-	-
40	-	1	5	4	1	-
45	-	-	2	3	4	1
50	-	-	-	1	3	2

5.

$XY$	40-50	50-60	60-70	70-80
10-11	2	11	3	2
11-12	1	19	2	4
12-13	3	6	27	6
13-14	2	3	3	8

6.

$XY$	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
10-20	5	7	0	0	0	0
20-30	0	20	23	0	0	0
30-40	0	0	30	47	2	0
40-50	0	0	10	11	20	6

50-60	0	0	0	9	7	3
-------	---	---	---	---	---	---

7.

X \ Y	30-50	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
50-70	5	0	0	0	0	0	0
70-90	2	3	4	0	0	0	0
90-110	0	1	7	6	0	0	0
110-130	0	0	1	8	4	0	0
130-150	0	0	1	1	5	2	0
150-170	0	0	0	0	0	5	0
170-190	0	0	0	0	0	0	2
190-210	0	0	0	0	0	0	2

8.

XY	7,0-7,2	7,2-7,4	7,4-7,6	7,6-7,8	7,8-8,0
2,15-2,45	5	4	0	0	0
2,45-2,75	0	12	8	1	0
2,75-3,05	0	0	5	5	0
3,05-3,35	0	0	4	7	0
3,35-3,65	0	0	0	12	1
3,65-3,95	0	0	0	0	1

В следующих задачах:

1) найти по данным наблюдений выборочное уравнение связи вида

$Z = AX + BX + C$  т.е. требуется найти коэффициенты регрессии  $A$  и  $B$  и параметр  $C$ ;

2) вычислить коэффициент множественной корреляции (т.е. оценить тесноту связи между  $Z$  и обоими величинами  $X, Y$ );

3) оценить тесноту связи между  $Z$  и  $X$  (при постоянном  $Y$ ), между  $Z$  и  $Y$  (при постоянном  $X$ ).

9.

$X_n$	1	-1	2	1	-1	-4	7	0	8	3	6	-2
$Y_n$	-1	1	-2	-6	-8	5	3	-3	0	-10	2	7
$Z_n$	2	0	1	-4	-8	4	11	-2	9	8	10	5

10.

$X_n$	1	4	0	5	-3	3	-5	-1	2	-2
$Y_n$	4	-6	2	-4	12	-2	14	6	0	8
$Z_n$	-4	-5	4	-1	4	0	5	1	2	7

12.

$X_n$	31	34	35	41	38	32	29	34
$Y_n$	29.5	14.2	18.0	21.3	47.5	10.0	21.0	36.5
$Z_n$	22.0	14.0	23.0	43.0	66.0	7.6	12.0	36.0

13.

$X_n$	0	44	4	61	35	64	13	56	18	2
$Y_n$	14	0	29	34	54	16	44	59	49	32
$Z_n$	0.5	47.2	8	63.8	18.2	47.5	0	60.9	19.2	9



Считая, что в следующих задачах зависимость между величинами  $X$  и  $Y$  имеет вид квадратичной регрессии второго порядка  $Y = Ax^2 + Bx + C$ , найти оценки параметров  $A, B$  и  $C$ .

14.

$X_n$	0	2	4	6	8	10
$Y_n$	5	-1	-0.5	1.5	4.5	8.5

15.

$X_n$	0.07	0.31	0.61	0.99	1.29	1.78	2.04
$Y_n$	1.34	1.08	0.94	1.06	1.25	2.01	2.60

16.

$X_n$	26	30	34	38	42	46	50
$Y_n$	3.94	4.60	5.67	6.93	8.25	7.73	10.55

17.

$X_n$	-2	-1	0	1	2
$Y_n$	4.8	0.4	-3.4	0.8	3.2

В следующих задачах найти оценки параметров  $A$  и  $B$  методом наименьших квадратов, считая, что между величинами  $X$  и  $Y$  имеет вид гиперболический регрессии первого порядка

$$Y = A + \frac{B}{x}.$$

18.

$X_n$	2	4	6	12
$Y_n$	8	5.25	3.50	3.25

19.

$X_n$	5.67	4.45	3.84	3.74	3.73	2.18
$Y_n$	6.8	8.5	10.5	10.2	6.8	11.8

20.

$X_n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Y_n$	16.50	13.75	13.31	12.50	13.51	12.75	12.30	12.83	12.28	12.34